

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра цифровых  
технологий, математики и  
экономики

**Методическая разработка**  
**к выполнению индивидуального домашнего задания по теме**  
**«Элементы гармонического анализа (ряды Фурье и интеграл Фурье)»**

по дисциплине: Дополнительные разделы математического анализа

для направлений: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника  
09.03.02 Информационные системы и технологии  
наименование направления подготовк

бакалавриат, очная форма обучения

наименование специальности, форма обучения

Мурманск  
2022

Составитель: Кацуба Валентина Сергеевна, канд. физ.- мат. наук, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики.

Методическая разработка к выполнению индивидуального домашнего задания «Элементы гармонического анализа (ряды Фурье и интеграл Фурье)» по дисциплине «Дополнительные разделы математического анализа» рассмотрена и одобрена на заседании кафедры-разработчика цифровых технологий, математики и экономики

24.05.2022 г., протокол №9 .

дата

Рецензент – Ромахова Ольга Андреевна, старший преподаватель кафедры цифровых технологий, математики и экономики

## Оглавление

1. Общие организационно-методические указания .....	4
2. Задание, план выполнения, требования к оформлению отчета.....	4
Содержание задач каждого варианта.....	4
Общие требования к оформлению РГР .....	5
План выполнения РГР .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
3. Список рекомендуемых учебных ресурсов .....	5
4. Образец варианта заданий.....	6
5. Пример выполнения заданий РГР .....	8
Задача 1 .....	8
Задача 2 .....	11
Задача 3 .....	13
Задача 4 .....	18
Приложение А. Варианты заданий.....	24
Приложение Б. Образец оформления титульного листа .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>

## 1. Общие организационно-методические указания

Индивидуальное домашнее задание включает типовые практические задачи по теме «Элементы гармонического анализа (ряды Фурье и интеграл Фурье)» в дисциплине «Дополнительные разделы математического анализа» и выполняется как часть контрольной работы студентами второго курса направлений 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.02 «Информационные системы и технологии», бакалавриат.

*Целевая установка:* при выполнении ИДЗ студент должен

- показать усвоенный теоретический материал по представлению функций тригонометрическими рядами Фурье или интегралами Фурье,
- знать условия, при которых эти представления возможны,
- уметь практически представить заданную функцию рядом или интегралом Фурье и получить основные спектральные характеристики функции,
- подтвердить полученные представления построением графиков с использованием ПМП «Mathematica» или другого математического пакета.

## 2. Задание, план выполнения, требования к оформлению отчета

ИДЗ содержит четыре задачи, из которых первые три относятся к рядам Фурье, а четвертая – к интегралу Фурье. Третье задание может быть объявлено преподавателем как бонусное. Для каждой задачи предлагается план ее решения.

*Содержание задач каждого варианта*

*Задача 1.* Разложить в ряд Фурье  $2\pi$  - периодическую функцию и записать сумму полученного ряда по теореме Дирихле и построить её график.

*Задача 2.* Разложить в ряд Фурье  $2l$  - периодическую функцию и составить сумму полученного ряда по теореме Дирихле. Найти амплитудный спектр функции и построить его график.

*Задача 3.* Составить ряд Фурье в комплексной форме для функции  $f(x)$ , периодической с  $T = 2l$ ; найти дискретный амплитудный спектр функции  $f(x)$ .

*Задача 4.* Составить представление непериодической функции  $f(x)$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$  интегралом Фурье; записать преобразования Фурье этой функции и найти ее амплитудный спектр.

*Общие требования к выполнению и сдаче ИДЗ*

- Задания могут выполняться в рабочей тетради по практическим занятиям и предъявляться к зачету поштучно;
- каждая задача должна иметь условие, подробное решение и ответ;
- в решении нужно ссылаться на теоретические факты (из темы ИДЗ), на основании которых строится решение;
- построение графиков и приведение подробных выкладок в решении обязательно;
- в каждой задаче необходимо сделать графическое подтверждение достоверности решения.

### **3. Список рекомендуемых учебных ресурсов**

1. Конспект лекций ведущего преподавателя дисциплины.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Рольф, 2000.– 256с.
3. Данко П.Б., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Часть II: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1997. – 416с.
4. Мостовской А.П. Информационные технологии в математике: Учебное пособие. – Мурманск: МГПУ, 2005. -16с.
5. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. – М.: ДМК Пресс, 2009. – 624с.

#### 4. Образец варианта заданий

*Задача 1* Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi; 0) \\ \sin x, & x \in [0; \pi] \end{cases}, \quad \text{имеющую наименьший период } T = 2\pi.$$

Составить сумму ряда  $S(x)$  и построить её график.

*Задача 2* Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию  $f(x) = x^2, x \in [-1; 1], T = 2$ . Составить сумму ряда  $S(x)$ . Найти амплитудный спектр функции и построить его график.

*План решения задач 1 и 2*

1. Постройте график функции  $f(x), x \in [-l; l]$  и ее периодического продолжения. Проанализируйте возможность разложения  $f(x)$  в тригонометрический ряд Фурье.
2. Запишите теоретический вид ряда Фурье для  $f(x)$  и формулы для коэффициентов ряда, учитывая величину периода и свойства четности функции  $f(x)$ , если оно есть.
3. Вычислите коэффициенты ряда  $a_0, a_n$  и  $b_n$ , подставьте их в формально составленный ранее ряд Фурье.
4. Подтвердите достоверность разложения построением графиков частичных сумм  $S_k(x)$  составленного ряда Фурье, увеличивая  $k$  до визуального совпадения графиков функций  $S_k(x)$  и  $f(x)$ .
5. Запишите сумму ряда  $S(x), x \in (-\infty; +\infty)$ , используя теорему Дирихле; постройте график функции  $S(x)$ .
6. Найдите амплитудный спектр  $A_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$  и постройте его график.
7. Составьте ответ по задаче.

*Задача 3* Составить ряд Фурье в комплексной форме для периодической функции  $f(x) = e^{-2x}, x \in (-\pi; \pi], T = 2\pi$ . Определить дискретный амплитудный спектр функции  $f(x)$ .

*План решения задачи 3*

1. Составьте ряд Фурье в комплексной форме для функции  $f(x), x \in (-l; l)$ , вычислите коэффициенты ряда. Запишите сумму ряда  $S(x), x \in (-\infty; +\infty)$ , используя теорему Дирихле.
2. Перейдите от комплексной формы ряда Фурье к его действительной форме и подтвердите достоверность разложения построением графиков

нескольких частичных сумм составленного ряда Фурье в действительной форме.

3. Определите дискретный амплитудный спектр функции  $f(x)$ . Вычислите значения нескольких амплитуд  $A_n$ ,  $n=1,2,3,4,5,10,15, \dots$ . Постройте график  $A_n = A(\omega_n)$ , где  $\omega_n$  – частота  $n$ -й гармоники.
4. Составьте ответ по задаче.

*Задача 4* Составить представления функции  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$  интегралом Фурье. Записать преобразования Фурье и определить непрерывный амплитудный спектр функции  $f(x)$ .

*План решения задачи 4*

1. Составьте представления функции  $f(x)$  интегралом Фурье в действительной форме и в комплексной форме. Запишите функцию  $S(x)$ , к которой сходится составленный интеграл Фурье.
2. Подтвердите достоверность представления построением графика интеграла Фурье на промежутке  $x \in (-l; l)$ , где число  $l$  нужно взять большим.
3. Запишите косинус-преобразование, синус-преобразование и комплексное преобразование Фурье функции  $f(x)$ .
4. Определите непрерывный амплитудный спектр  $A(\omega)$  функции  $f(x)$ , постройте его график.
5. Составьте ответ по задаче.

## 5. Пример выполнения заданий ИДЗ

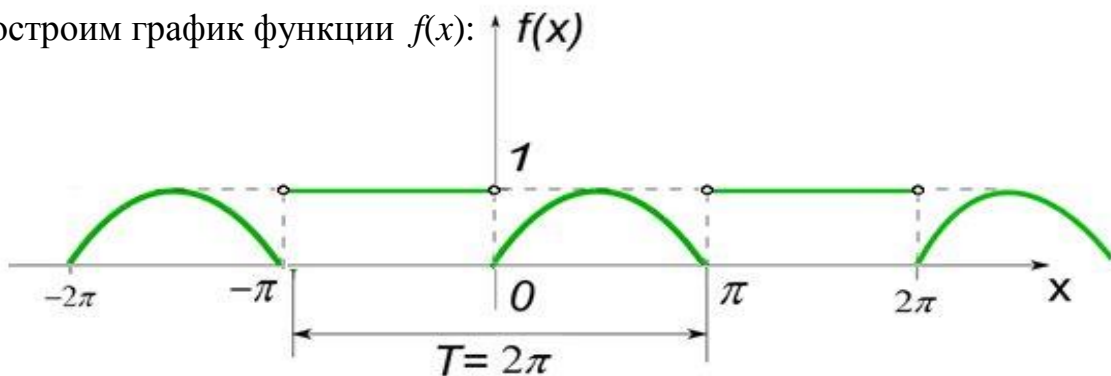
### Задача 1

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi; 0) \\ \sin x, & x \in [0; \pi] \end{cases}$ ,

имеющую наименьший период  $T = 2\pi$ . Составить сумму ряда  $S(x)$  и построить её график.

### Решение

1. Построим график функции  $f(x)$ :



Функция  $f(x)$  является кусочно-непрерывной (то есть имеет только конечное число точек разрыва первого рода) в каждой точке промежутка  $x \in [-\pi; \pi]$ , следовательно, удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому её можно представить тригонометрическим рядом Фурье.

2. Записываем вид ряда Фурье и формулы для его коэффициентов, учитывая, что  $f(x)$  является  $2\pi$ -периодической функцией:

$$f(x) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx;$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \cdot dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \cdot dx.$$

3. Вычисляем коэффициенты Фурье для данной функции  $f(x)$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 1 \cdot dx + \int_0^{\pi} \sin x \cdot dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( x \Big|_{-\pi}^0 + (-\cos x) \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} (\pi + 2) = \boxed{1 + \frac{2}{\pi} = a_0}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 1 \cdot \cos nx \cdot dx + \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos nx \cdot dx \right) = \left\{ \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \right\} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0}_0 + \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} \sin x(n+1) \cdot dx + \int_0^{\pi} \sin x(1-n) \cdot dx \right) \stackrel{n \neq 1}{=} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{-\cos(1-n)x}{1-n} \right) \Big|_{x=0}^{\pi} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{-\cos(1-n)\pi}{1-n} + \frac{1}{1-n} \right) = \{ \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha \} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\cos \pi n}{n+1} + \frac{\cos \pi n}{1-n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{1-n} \right) = \left\{ \cos \pi n = (-1)^n \right\} = \frac{1}{2\pi} \left( (-1)^n \frac{1-n+n+1}{1-n^2} + \frac{1-n+n+1}{1-n^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{1-n^2} ((-1)^n + 1) = \boxed{\frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)} = a_n, \quad n = 2, 3, 4, \dots};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin x(1+1) dx + \int_0^\pi \sin x(1-1) dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin 2x dx + \int_0^\pi \sin 0 dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^\pi + 0 \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} (\cos 2\pi - \cos 0) = \boxed{0 = a_1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 1 \cdot \sin nx \cdot dx + \int_0^\pi \sin x \cdot \sin nx \cdot dx \right) = \left\{ \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \right\} = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{2\pi} \left( -\int_0^\pi \cos x(n+1) \cdot dx + \int_0^\pi \cos x(1-n) \cdot dx \right) \Big|_{n \neq 1} = \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n} \right) \Big|_{x=0}^\pi = \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\sin(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\sin(1-n)\pi}{1-n} + \frac{\sin 0}{n+1} - \frac{\sin 0}{1-n} \right) = \boxed{\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} = b_n, \quad n = 2, 3, 4, \dots};
\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{-2}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \left( -\int_0^\pi \cos 2x dx + \int_0^\pi \cos 0 dx \right) = \frac{-2}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^\pi + x \Big|_0^\pi \right) = \frac{-2}{\pi} + \frac{1}{2\pi} (0 + \pi) = \boxed{\frac{-2}{\pi} + \frac{1}{2} = b_1}.$$

Таким образом, для данной функции  $f(x)$  значения коэффициентов Фурье получились следующими:

$$a_0 = 1 + \frac{2}{\pi}, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{-2}{\pi} + \frac{1}{2}; \quad \text{при } n = 2, 3, 4, \dots \quad a_n = \frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}, \quad b_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n}.$$

Подставляем вычисленные коэффициенты в формально записанный ранее ряд Фурье:

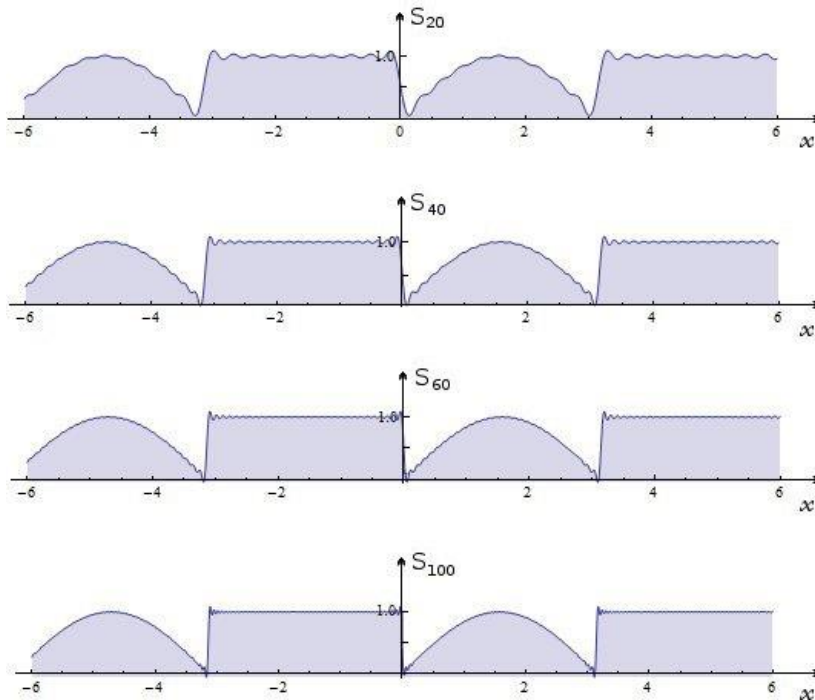
$$f(x) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \left( \frac{-2}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)} \cos nx + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \sin nx.$$

4. Для проверки достоверности разложения построим графики нескольких частичных сумм составленного ряда Фурье:

$$S_k(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \left( \frac{-2}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \sin x + \sum_{n=2}^k \frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)} \cos nx + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \sin nx.$$

Используем ПП «Wolfram Mathematica 7»:

$$\text{Plot} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \left( \frac{-2}{\pi} + \frac{1}{2} \right) * \text{Sin}[x] + \frac{1}{\pi} * \sum_{n=2}^k \left( \frac{1+(-1)^n}{1-n^2} * \text{Cos}[n * x] + \frac{(-1)^n - 1}{n} * \text{Sin}[n * x] \right), \{x, -6, 6\} \right]$$



Построенные графики частичных сумм показывают, что искомое разложение составлено верно, так как графики частичных сумм визуально близки к графику функции  $f(x)$ .

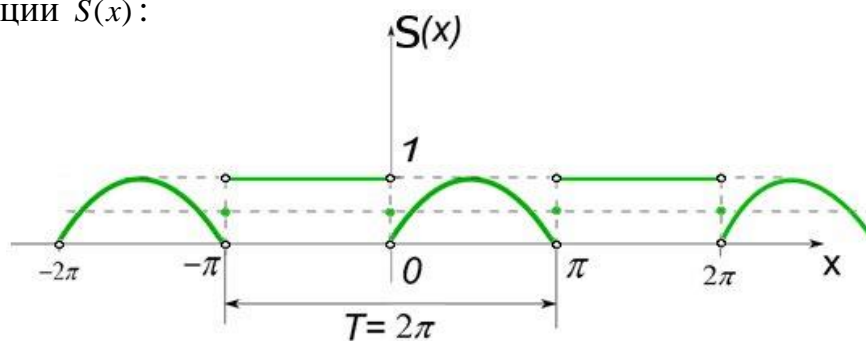
6. Составляем сумму  $S(x)$  полученного ряда Фурье, используя теорему Дирихле, которая относительно суммы  $S(x)$  утверждает следующее:

$$\begin{cases} S(x) = f(x), & \text{если } x - \text{ точка непрерывности } f(x) \\ S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}, & \text{если } x_0 - \text{ точка разрыва } f(x) \end{cases}$$

На основании этой теоремы в решаемой задаче получаем:

$$\begin{cases} S(x) = 1, & x \in (-\pi; 0) \\ S(x) = \sin x, & x \in (0; \pi) \\ S(x) = 0,5, & x \in \{0, -\pi, \pi\}, \text{ функция } S(x) - \text{ периодическая с } T = 2\pi. \end{cases}$$

График функции  $S(x)$ :



Построив этот график, нужно понимать, что значения суммы полученного ряда Фурье для функции  $f(x)$  совпадают со значениями  $f(x)$  только в точках её непрерывности и получаются иными в точках разрыва  $f(x)$ . Поэтому, записывая в ответ знак равенства между функцией и соответствующим ей тригонометрическим рядом Фурье нужно помнить, что это равенство выполняется в смысле «почти всюду».

Ответ:  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \left(\frac{-2}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \sin x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-n^2)} \cos nx + \frac{(-1)^n - 1}{n} \sin nx,$

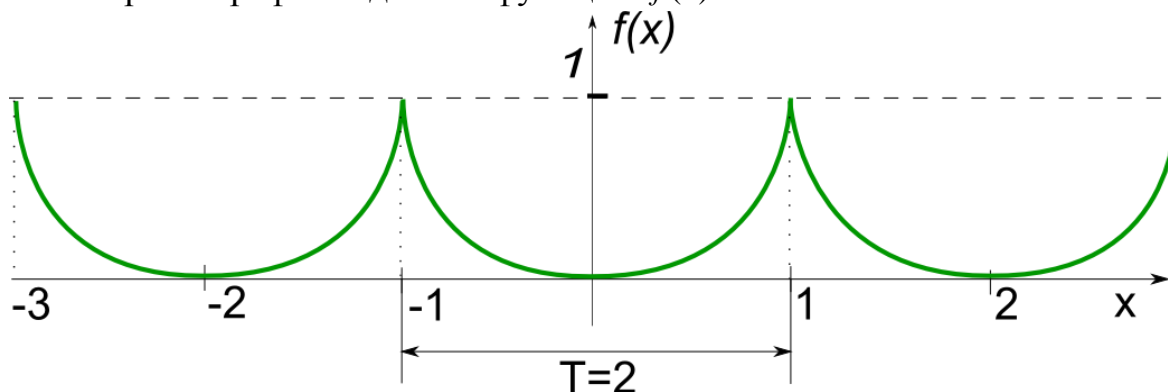
$$\begin{cases} S(x) = 1, & x \in (-\pi; 0) \\ S(x) = \sin x, & x \in (0; \pi) \\ S(x) = 0,5, & x \in \{0, -\pi, \pi\}, \text{ функция } S(x) \text{ – периодическая с } T = 2\pi. \end{cases}$$

### Задача 2

Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x^2, x \in [-1; 1), T = 2$ . Составить сумму ряда  $S(x)$ . Найти амплитудный спектр функции и построить его график.

Решение

1. Построим график заданной функции  $f(x)$ :



Функция является непрерывной, поэтому удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, следовательно, может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье при  $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ .

2. Записываем вид соответствующего ряда Фурье для  $2l$ -периодической функции и формулы для его коэффициентов

$$f(x) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l};$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx; \quad l=1.$$

Данная функция является четной, поэтому её коэффициенты Фурье можно вычислить по упрощенным формулам, которые учитывают четность функции  $f(x)$ :

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n=1,2,3...; \quad b_n = 0, \quad n=1,2,3...;$$

3. Вычисляем коэффициенты  $a_0$  и  $a_n$  для данной в задаче функции:

$$a_0 = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \boxed{\frac{2}{3} = a_0};$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos \pi n x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos \pi n x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \end{array} = 2 \left( \frac{x^2 \sin \pi n x}{\pi n} \right) \Big|_{x=0}^1 - \frac{4}{\pi n} \int_0^1 x \sin \pi n x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin \pi n x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{-\cos \pi n x}{\pi n} \end{array} = 0 - \frac{4}{\pi n} \left( \left( \frac{-x \cos \pi n x}{\pi n} \right) \Big|_{x=0}^1 + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \cos \pi n x dx \right) =$$

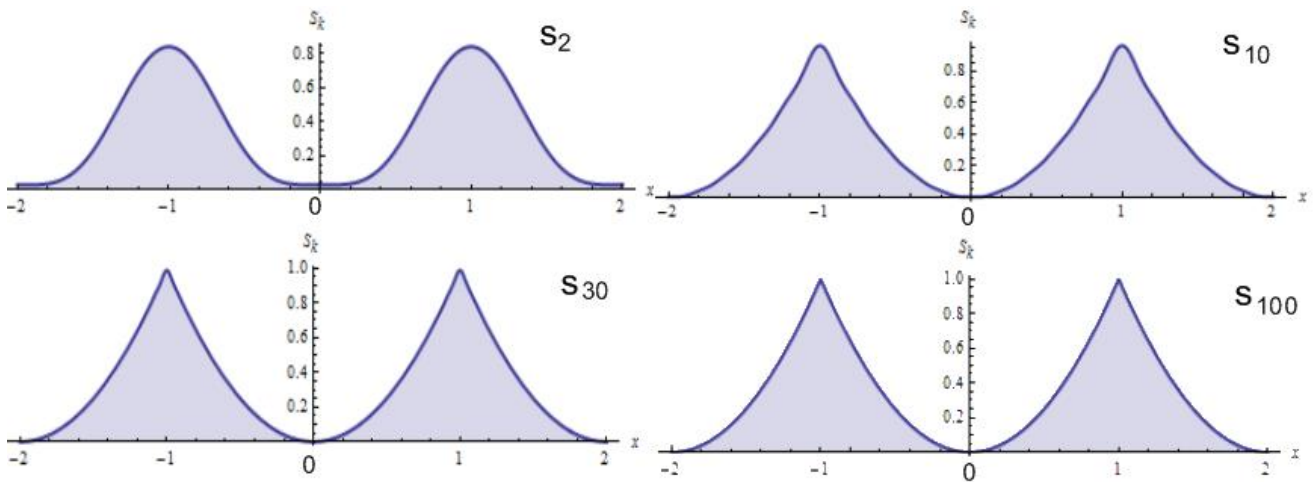
$$= \frac{4 \cos \pi n}{\pi^2 n^2} - \frac{4}{\pi n} \left( \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \right) \Big|_0^1 = \frac{4 \cos \pi n}{\pi^2 n^2} = \boxed{\frac{(-1)^n 4}{\pi^2 n^2} = a_n, \quad n=1,2,3...};$$

подставляем посчитанные коэффициенты в записанный формально ряд Фурье:

$$f(x) \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi n x.$$

4. Убедимся в достоверности полученного разложения, построив нескольких частичных сумм  $S_k(x)$  составленного ряда, используя, например, ПП «Wolfram Mathematica 7»:

$$\text{Plot}\left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} * \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^n}{n^2} \text{Cos}[\pi * n * x], \{x, -2, 2\}\right]$$



5. Сумма ряда  $S(x)$  совпадает с  $f(x)$  при  $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ , так как  $f(x)$  является непрерывной, поэтому  $S(x) = x^2$ ,  $x \in [-1; 1]$ ,  $T = 2$ . В этой задаче график суммы  $S(x)$  такой же, как и график  $f(x)$ . В ответ можно записать знак равенства в обычном смысле между функцией  $f(x)$  и её рядом Фурье.

6. Дискретный амплитудный спектр данной функции  $f(x)$  – это есть множество чисел  $A_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , каждое из которых задает значение амплитуды гармоники с соответствующим номером  $n$ . В решаемой задаче при разложении функции в тригонометрический ряд Фурье получены значения

$$a_n = \frac{(-1)^n 4}{\pi^2 n^2}, b_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots, \text{ поэтому } A_n = \sqrt{\left(\frac{(-1)^n 4}{\pi^2 n^2}\right)^2 + 0^2} = \frac{2}{\pi n}, n \in \mathbb{N}.$$

Часто принято записывать амплитуды как функции частот соответствующих гармоник. Для данной функции  $f(x)$  частотами являются числа  $\omega_n = \pi n$ ,

поэтому  $A_n(\omega_n) = \frac{2}{\omega_n}$ . График этой функции имеет вид дискретного множества

точек.

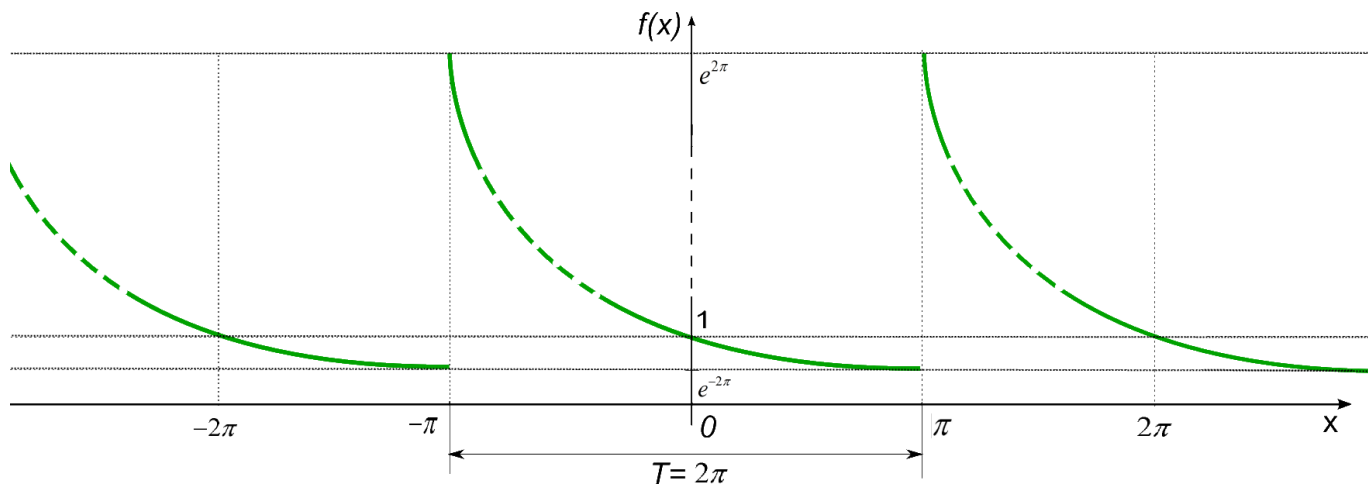
$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi n x, x \in [-1; 1], T = 2; A_n(\omega_n) = \frac{2}{\omega_n}, n \in \mathbb{N}.$$

### Задача 3

Составить ряд Фурье в комплексной форме для периодической функции  $f(x) = e^{-2x}$ ,  $x \in (-\pi; \pi]$ ,  $T = 2\pi$ . Определить дискретный амплитудный спектр функции.

## Решение

1. Построим график заданной функции, учитывая её периодичность:



Функция  $f(x)$  является ограниченной, кусочно-непрерывной, имеет разрывы только первого рода и они образуют конечное множество на промежутке  $x \in [-\pi; \pi]$  и счётное множество на всей числовой оси, поэтому эта функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, следовательно, может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье.

Записываем вид этого ряда в комплексной форме и формулы для его коэффициентов:

$$f(x) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Вычисляем коэффициенты  $c_n$  для заданной функции:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{-x(2+in)}}{-2-in} \right) \Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{-\pi(2+in)}}{-2-in} - \frac{e^{\pi(2+in)}}{-2-in} \right) = \left\{ e^{\pm i\pi n} = (-1)^n \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{-2\pi} (-1)^n - e^{2\pi} (-1)^n}{-2-in} \right) = \boxed{\frac{(-1)^n \operatorname{sh} 2\pi}{\pi(4+n^2)} (2-in) = c_n}. \end{aligned}$$

Подставляем коэффициенты  $c_n$  и получаем ряд Фурье в комплексной форме для данной функции:

$$f(x) \rightarrow \frac{\operatorname{sh} 2\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (2-in) e^{inx}}{4+n^2}.$$

Запишем сумму составленного ряда по теореме Дирихле:

$$\left[ \begin{array}{l} S(x) = e^{-2x}, \forall x \in (-\pi; \pi) \\ S(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi+0} f(x)}{2} = \frac{e^{+2\pi} + e^{-2\pi}}{2} = \operatorname{ch} 2\pi, \quad x \in \{-\pi; \pi\} \end{array} \right.$$

$S(x)$  - периодическая функция с периодом  $T = 2\pi$ .

2. Чтобы записать полученный ряд Фурье в действительной форме, можно воспользоваться теоретически известными формулами, связывающими коэффициенты обеих форм ряда Фурье:

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = (c_n + c_{-n}) = 2\operatorname{Re} c_n, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) = -2i\operatorname{Im} c_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

или можно выполнить объединение в пары слагаемых комплексного ряда, отличающихся только знаком индекса. В результате выполнения этой работы получим:

$$a_0 = \frac{\operatorname{sh} 2\pi}{\pi}, \quad a_n = \frac{(-1)^n 4\operatorname{sh} 2\pi}{\pi(4+n^2)}, \quad b_n = \frac{(-1)^n 2n\operatorname{sh} 2\pi}{\pi(4+n^2)} \Rightarrow$$

$$f(x) \rightarrow \frac{\operatorname{sh} 2\pi}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4\operatorname{sh} 2\pi}{\pi(4+n^2)} \cos nx + \frac{(-1)^n 2n\operatorname{sh} 2\pi}{\pi(4+n^2)} \sin nx \Leftrightarrow$$

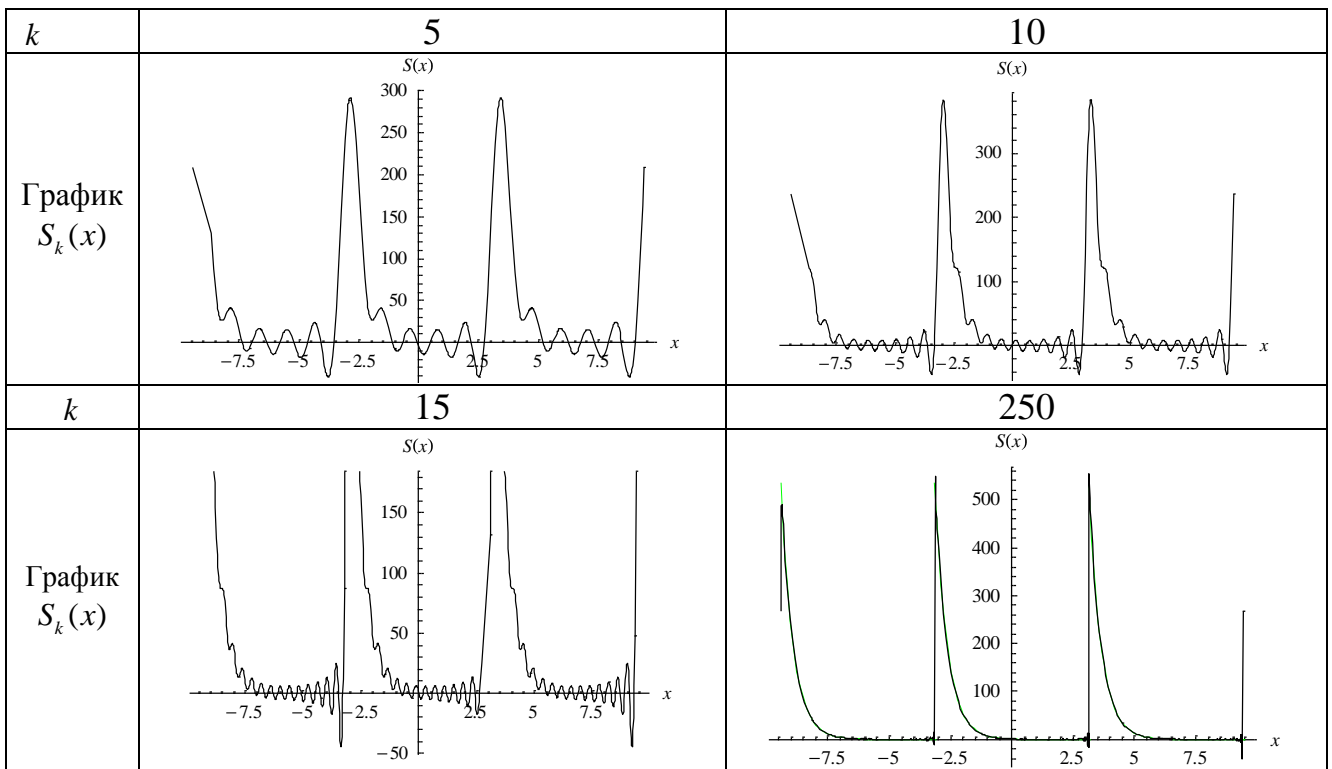
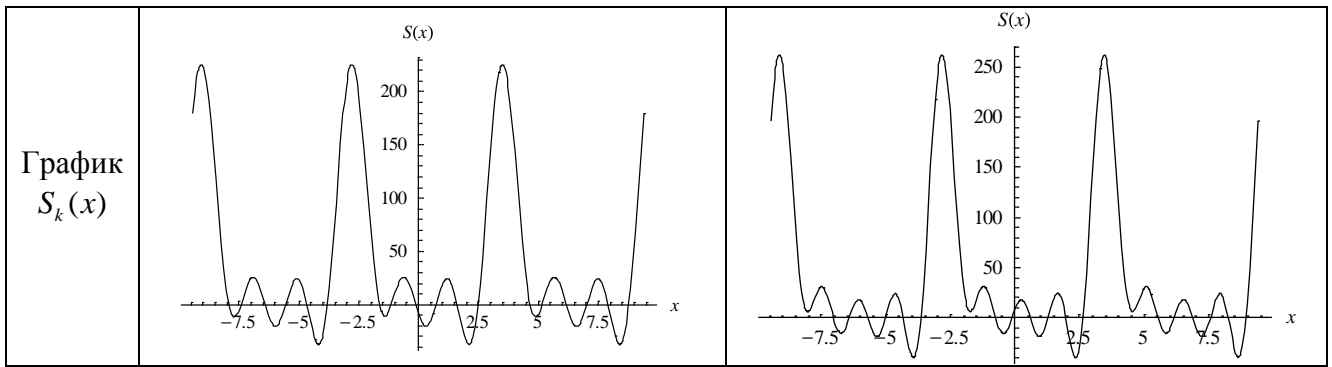
$$f(x) \rightarrow \frac{\operatorname{sh} 2\pi}{2\pi} + \frac{2\operatorname{sh} 2\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{(4+n^2)} \cos nx + \frac{(-1)^n n}{(4+n^2)} \sin nx.$$

Построим графики частичных сумм  $S_k(x)$  ряда Фурье, используя действительную форму этого ряда:

$$S_k(x) = \frac{\operatorname{sh} 2\pi}{2\pi} + \frac{2\operatorname{sh} 2\pi}{\pi} \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^n 2}{(4+n^2)} \cos nx + \frac{(-1)^n n}{(4+n^2)} \sin nx;$$

будем увеличивать количество членов ряда  $k$  до визуального совпадения графика частичной суммы  $S_k(x)$  и исходной функции  $f(x)$ :

$k$	1	2
График $S_k(x)$		
	3	4



3. Определим дискретный амплитудный спектр заданной функции и построим его график, используя для этого следующие теоретические формулы:

$$A(\omega_n) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \omega_n = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{или} \quad A(\omega_n) = |c_n|, \quad \omega_n = n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

В данной задаче

$$A(\omega_n) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(\frac{(-1)^n 4 \cdot \text{sh}2\pi}{\pi(4+n^2)}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^n 2n \cdot \text{sh}2\pi}{\pi(4+n^2)}\right)^2} = \frac{2\text{sh}2\pi\sqrt{4+n^2}}{\pi(4+n^2)} = \frac{2\text{sh}2\pi}{\pi\sqrt{4+n^2}}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$A(\omega_n) = |c_n| = \left|\frac{(-1)^n \text{sh}2\pi}{\pi(4+n^2)}(2-in)\right| = \frac{\text{sh}2\pi}{\pi(4+n^2)}|2-in| = \frac{\text{sh}2\pi}{\pi(4+n^2)}\sqrt{4+n^2} = \frac{\text{sh}2\pi}{\pi\sqrt{4+n^2}}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots;$$

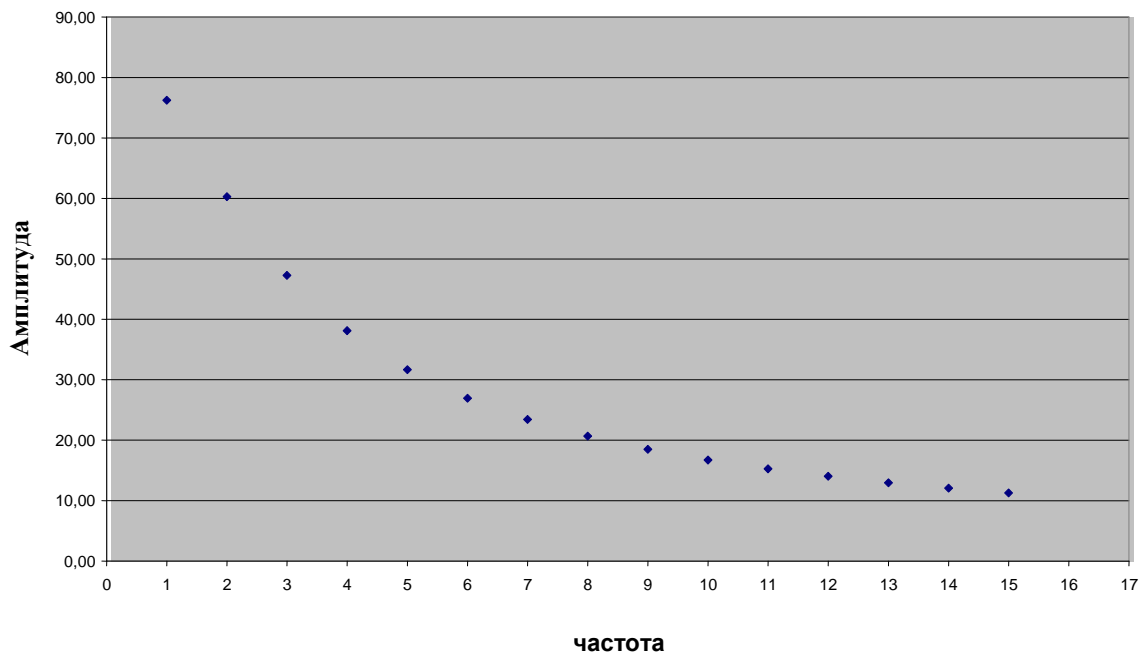


очевидно, что  $A(\omega_n) = \frac{1}{2} A(\omega_n)$  при  $n = 1, 2, \dots$

Таблица значений  $A(\omega_n)$

$\omega_n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$A(\omega_n)$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{5}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{2}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{13}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{5}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{29}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{10}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{53}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{17}\pi}$
приблизж. значение $A(\omega_n)$	76.228	60.264	47.274	38.114	31.652	26.950	23.413	20.670
$\omega_n$	9	10	11	12	13	14	15	250
$A(\omega_n)$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{85}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{26}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{5\sqrt{5}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{37}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{173}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{5\sqrt{2}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{229}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{15626}\pi}$
приблизж. значение $A(\omega_n)$	18.488	16.714	15.245	14.011	12.959	12.052	11.264	0.682

График амплитудного спектра  $A(\omega_n)$ ,  $\omega_n = n = 1, 2, 3, \dots$



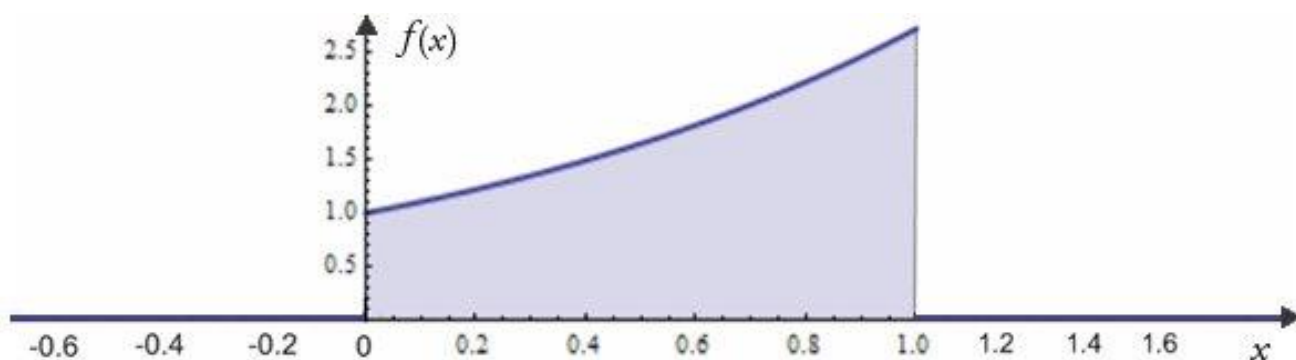
Ответ:  $f(x) = \frac{\text{sh}2\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4+n^2} (2-in)e^{inx}$ ;  $A(\omega_n) = \frac{2\text{sh}2\pi}{\pi\sqrt{4+n^2}}$ ,  $\omega_n = n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

#### Задача 4

Составить представления функции  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$  интегралом Фурье. Найти преобразования Фурье и определить непрерывный амплитудный спектр функции  $f(x)$ .

#### Решение

1. Построим график заданной функции  $f(x)$ :



Данная функция  $f(x)$  на каждом отрезке  $[-l, l]$ , где  $l$  – любое число, кусочно-монотонная (в нестрогом смысле), кроме того,  $f(x)$  – абсолютно интегрируемая функция, т.е. сходится несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$ . Таким образом, функция может быть представлена интегралом Фурье.

Составим представление функции  $f(x)$  интегралом Фурье в действительной форме, которое имеет следующий теоретический вид:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cdot \cos \omega x + b(\omega) \cdot \sin \omega x) d\omega,$$

$$\text{где } a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos \omega x \cdot dx, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sin \omega x \cdot dx. \quad (1)$$

Вычисляем функции  $a(\omega), b(\omega)$ , замечая при этом, что есть особый случай интегрирования при значении  $\omega = 0$ :

1) если  $\omega \neq 0$ , то

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^x \cos \omega x dx = \frac{e}{\pi(\omega^2 + 1)} (\cos \omega + \omega \sin \omega) - \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)};$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^x \sin \omega x dx = \frac{e}{\pi(\omega^2 + 1)} (-\omega \cos \omega + \sin \omega) + \frac{\omega}{\pi(\omega^2 + 1)};$$

вычисление интегралов проведено методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos \omega x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \cos \omega x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \frac{\sin \omega x}{\omega} \end{array} \right\} = e^x \frac{\sin \omega x}{\omega} - \frac{1}{\omega} \int e^x \sin \omega x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \sin \omega x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \frac{-\cos \omega x}{\omega} \end{array} \right\} = e^x \frac{\sin \omega x}{\omega} + e^x \frac{\cos \omega x}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \int e^x \cos \omega x dx \Rightarrow \\ \int e^x \cos \omega x dx &= \frac{\omega^2 \left( e^x \frac{\sin \omega x}{\omega} + e^x \frac{\cos \omega x}{\omega^2} \right)}{\omega^2 + 1} = \frac{e^x}{\omega^2 + 1} (\cos \omega x + \omega \sin \omega x) + C. \\ \int e^x \sin \omega x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \sin \omega x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \frac{-\cos \omega x}{\omega} \end{array} \right\} = -e^x \frac{\cos \omega x}{\omega} + \frac{1}{\omega} \int e^x \cos \omega x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \cos \omega x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \frac{\sin \omega x}{\omega} \end{array} \right\} = -e^x \frac{\cos \omega x}{\omega} + e^x \frac{\sin \omega x}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \int e^x \sin \omega x dx \Rightarrow \\ \int e^x \sin \omega x dx &= \frac{\omega^2 \left( e^x \frac{\sin \omega x}{\omega^2} - e^x \frac{\cos \omega x}{\omega} \right)}{\omega^2 + 1} = \frac{e^x}{\omega^2 + 1} (-\omega \cos \omega x + \sin \omega x) + C; \end{aligned}$$

2) если  $\omega = 0$ , то

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^x \cdot \cos 0 dx = \frac{e-1}{\pi}; \\ b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^x \cdot 0 dx = 0; \end{aligned}$$

эти же значения могут быть получены посредством предельного перехода при условии  $\omega \rightarrow 0$  в предыдущих формулах, полученных для случая  $\omega \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} a(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{e}{\pi(\omega^2 + 1)} (\cos \omega + \omega \sin \omega) - \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)} \right) = \frac{e-1}{\pi}; \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} b(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{e}{\pi(\omega^2 + 1)} (-\omega \cos \omega + \sin \omega) + \frac{\omega}{\pi(\omega^2 + 1)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя функции  $a(\omega)$  и  $b(\omega)$  в равенство (1), получаем представление данной функции  $f(x)$  интегралом Фурье в действительной форме:

$$f(x) = \int_{x \in (-\infty; +\infty)} \left( \left( \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)} (e \cos \omega + e\omega \sin \omega - 1) \right) \cos \omega x + \left( \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)} (-e\omega \cos \omega + e \sin \omega + \omega) \right) \sin \omega x \right) d\omega.$$

Составленный несобственный интеграл гарантированно сходится к функции  $S(x)$ , которая составляется по теореме Дирихле, и отличается от функции  $f(x)$  только в точках скачков; в решаемой задаче  $S(x)$  имеет вид:

$$\begin{cases} S(x) = 0, & x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ S(x) = e^x, & x \in (0; 1) \\ S(x) = 0,5, & x = 0 \\ S(x) = \frac{e}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

**Комплексная форма интеграла Фурье** имеет следующий теоретический вид:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx;$$

вычисляем функции  $c(\omega)$ :

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^x e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{x(1-i\omega)} dx = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{(1-i\omega)} - 1}{1-i\omega} - \frac{1}{1-i\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{(1-i\omega)} - 1}{1-i\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{(1-i\omega)} - 1}{1+\omega^2} \right) (1+i\omega);$$

подставляя  $c(\omega)$ , получаем представление той же функции  $f(x)$  интегралом Фурье в комплексной форме:

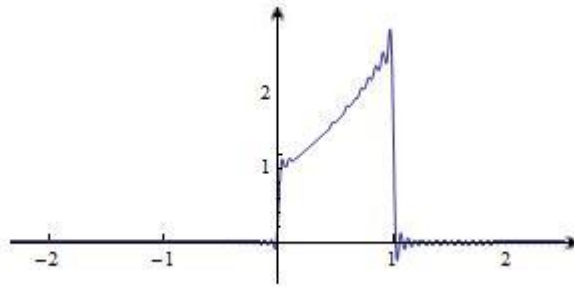
$$f(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{(1-i\omega)} - 1}{1+\omega^2} \right) (1+i\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

2. Чтобы подтвердить **достоверность** полученного представления функции  $f(x)$ , построим график интеграла Фурье в действительной форме на промежутке  $x \in (-l; l)$ , заменив в несобственном интеграле верхний бесконечный предел интегрирования некоторым большим числом  $A$ :

$$f(x) = \int_{x \in (-l; l)} \left( \left( \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)} (e \cos \omega + e\omega \sin \omega - 1) \right) \cos \omega x + \left( \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)} (-e\omega \cos \omega + e \sin \omega + \omega) \right) \sin \omega x \right) d\omega.$$

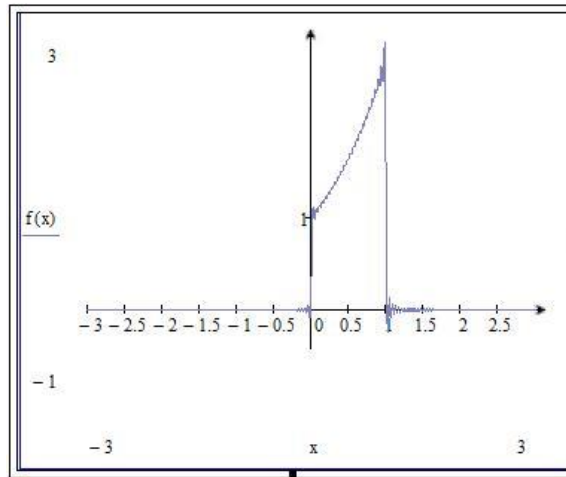
Используем ПМП «Wolfram Mathematica 7»:

$$\text{Plot} \left[ \int_0^A \left( \frac{1}{\pi * (\omega^2 + 1)} * (e * \text{Cos}[\omega] + e * \omega * \text{Sin}[\omega] - 1) \right) * \text{Cos}[\omega * x] + \left( \frac{1}{\pi * (\omega^2 + 1)} * (-e * \omega * \text{Cos}[\omega] + e * \text{Sin}[\omega] + \omega) \right) * \text{Sin}[\omega * x] dx, \{x, -3, 3\} \right]$$



Продолжительность счета при значении  $A = 100$  примерно 40 минут.  
Используем ПП «MathCad»:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^A \left( \frac{1}{\omega^2 + 1} * (e * \cos(\omega) + e * \omega * \sin(\omega) - 1) * \cos(\omega * x) + \right. \\ \left. \frac{1}{\omega^2 + 1} * (-e * \omega * \cos(\omega) + e * \sin(\omega) + \omega) * \sin(\omega * x) \right) dx$$



Продолжительность счета при значении  $A=150$  составляет несколько секунд.

3. Запишем **косинус-преобразование Фурье**  $a(\omega)$ , **синус-преобразование Фурье**  $b(\omega)$  и **комплексное преобразование Фурье**  $c(\omega)$  данной функции  $f(x)$ :

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = \frac{e}{(\omega^2 + 1)} (\cos \omega + \omega \sin \omega) - \frac{1}{(\omega^2 + 1)}, \quad \omega \in [0; +\infty);$$

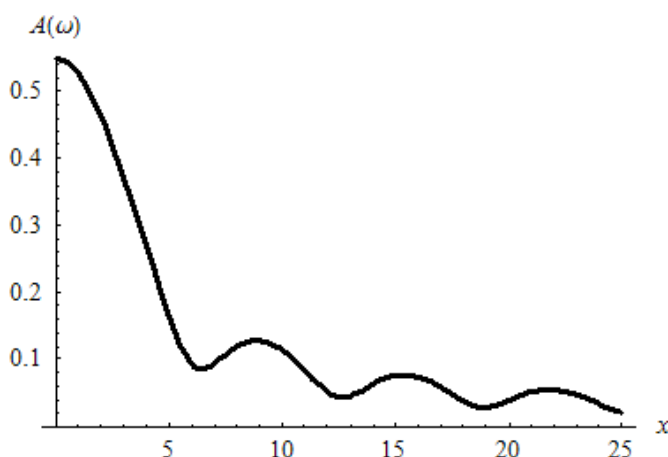
$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx = \frac{e}{(\omega^2 + 1)} (-\omega \cos \omega + \sin \omega) + \frac{\omega}{(\omega^2 + 1)}, \quad \omega \in [0; +\infty);$$

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{(1-i\omega)} - 1}{1 + \omega^2} \right) (1 + i\omega), \quad \omega \in (-\infty; +\infty).$$

4. Определим **непрерывный амплитудный спектр**  $A(\omega)$  данной функции  $f(x)$ , построим его график. Для действительной формы интеграла Фурье:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\left( \frac{e}{(\omega^2 + 1)} (\cos \omega + \omega \sin \omega) - \frac{1}{(\omega^2 + 1)} \right)^2 + \left( \frac{e}{(\omega^2 + 1)} (-\omega \cos \omega + \sin \omega) + \frac{\omega}{(\omega^2 + 1)} \right)^2} = \\
&= \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)} \sqrt{(e \cos \omega + e\omega \sin \omega - 1)^2 + (-e\omega \cos \omega + e \sin \omega + \omega)^2} = \\
&= \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)} (e^2 \cos^2 \omega + 1 + e^2 \omega^2 \sin^2 \omega + e^2 \omega \sin 2\omega - 2e \cos \omega - 2e\omega \sin \omega + \\
&\quad + e^2 \omega^2 \cos^2 \omega + \omega^2 + e^2 \sin^2 \omega - 2e\omega^2 \cos \omega + 2e\omega \sin \omega - e^2 \omega \sin 2\omega)^{0.5} = \\
&= \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)} (e^2 + 1 + e^2 \omega^2 - 2e \cos \omega + \omega^2 - 2e\omega^2 \cos \omega)^{0.5} = \boxed{\frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)^{0.5}} \sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \omega} = A(\omega), \omega \geq 0};
\end{aligned}$$

график амплитудного спектра по действительной форме интеграла Фурье:

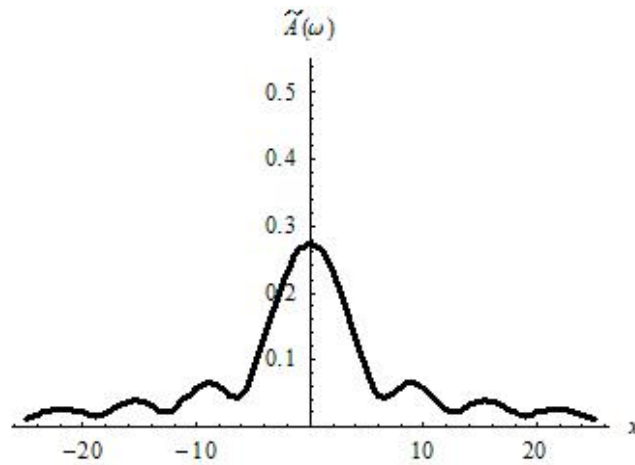


Амплитудный спектр  $A(\omega)$  для комплексной формы составленного интеграла Фурье:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(\omega) &= |c(\omega)| = \left| \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{(1-i\omega)} - 1}{1 + \omega^2} \right) (1 + i\omega) \right| = \frac{1}{2\pi(1 + \omega^2)} \left| ((e \cos \omega - 1) - ie \sin \omega)(1 + i\omega) \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi(1 + \omega^2)} \left| ((e \cos \omega - 1 + e \sin \omega) - i(e \sin \omega + \omega - e\omega \cos \omega)) \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi(\omega^2 + 1)} \sqrt{(e \cos \omega + e\omega \sin \omega - 1)^2 + (-e\omega \cos \omega + e \sin \omega + \omega)^2} = \\
&= \frac{1}{2\pi(\omega^2 + 1)} \sqrt{(e \cos \omega + e\omega \sin \omega - 1)^2 + (-e\omega \cos \omega + e \sin \omega + \omega)^2} = \\
&= \frac{1}{2\pi(\omega^2 + 1)} (e^2 \cos^2 \omega + 1 + e^2 \omega^2 \sin^2 \omega + e^2 \omega \sin 2\omega - 2e \cos \omega - 2e\omega \sin \omega + \\
&\quad + e^2 \omega^2 \cos^2 \omega + \omega^2 + e^2 \sin^2 \omega - 2e\omega^2 \cos \omega + 2e\omega \sin \omega - e^2 \omega \sin 2\omega)^{0.5} = \\
&= \frac{1}{2\pi(\omega^2 + 1)} (e^2 + 1 + e^2 \omega^2 - 2e \cos \omega + \omega^2 - 2e\omega^2 \cos \omega)^{0.5} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi(\omega^2 + 1)^{0.5}} \sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \omega} = \tilde{A}(\omega), \omega \in (-\infty; +\infty);$$

график амплитудного спектра по комплексной форме интеграла Фурье:



Очевидно, что при значениях  $\omega \in [0; +\infty)$  выполняется равенство  $A(\omega) = 0,5 \cdot A(\omega)$ .

Ответ по задаче 4:

1. Представление  $f(x)$  интегралом Фурье в действительной форме:

$$f(x) = \int_{-\infty; +\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)} (e \cos \omega + e\omega \sin \omega - 1) \right) \cos \omega x + \left( \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)} (-e\omega \cos \omega + e \sin \omega + \omega) \right) \sin \omega x d\omega;$$

представление  $f(x)$  интегралом Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{(1-i\omega)} - 1}{1 + \omega^2} \right) (1 + i\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

2. Преобразования Фурье функции  $f(x)$ :

$$a(\omega) = \frac{e}{(\omega^2 + 1)} (\cos \omega + \omega \sin \omega) - \frac{1}{(\omega^2 + 1)}, \quad \omega \in [0; +\infty) \text{ (косинус-преобразование);}$$

$$b(\omega) = \frac{e}{(\omega^2 + 1)} (-\omega \cos \omega + \sin \omega) + \frac{\omega}{(\omega^2 + 1)}, \quad \omega \in [0; +\infty) \text{ (синус-преобразование);}$$

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{(1-i\omega)} - 1}{1 + \omega^2} \right) (1 + i\omega), \quad \omega \in (-\infty; +\infty) \text{ (комплексное преобразование).}$$

3. Амплитудный спектр функции  $f(x)$ :

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)^{0.5}} \sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \omega}, \quad \omega \in [0; +\infty);$$

$$\tilde{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi(\omega^2 + 1)^{0.5}} \sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \omega}, \quad \omega \in (-\infty; +\infty).$$

## Приложение А. Варианты заданий

**Задача 1** Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию  $f(x)$ , имеющую наименьший период  $T = 2\pi$ . Составить сумму ряда  $S(x)$  и построить её график.

*В а р и а н т ы*

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi; 0] \\ \cos 2x, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi; 0] \\ x^2 + 1, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	3. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi; 0] \\ \sin 2x, & x \in (0; \pi] \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-\pi; 0] \\ 0, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	5. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi; 0] \\ 1, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	6. $f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in [-\pi; 0] \\ \pi - \frac{x}{2}, & x \in (0; \pi) \end{cases}$
7. $f(x) = \cos \frac{x}{2}, x \in [-\pi; \pi)$	8. $f(x) = \sin \frac{x}{2}, x \in [-\pi; \pi)$	9. $f(x) = \sin \frac{x}{3}, x \in [-\pi; \pi)$
10. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi; 0] \\ \cos x, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	11. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-\pi; 0] \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	12. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi; 0] \\ \pi - x, & x \in (0; \pi) \end{cases}$
13. $f(x) =  x  - \pi, x \in [-\pi; \pi)$	14. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi; 0] \\ \pi^2 - x^2, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	15. $f(x) = \cos \frac{x}{3}, x \in [-\pi; \pi)$
16. $f(x) = \operatorname{sh} x, x \in [-\pi; \pi)$	17. $f(x) = e^{-x}, x \in [-\pi; \pi)$	18. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-\pi; 0] \\ 0, & x \in (0; \pi) \end{cases}$
19. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi; 0] \\ e^x, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	20. $f(x) = x^2 + 4x, x \in [-\pi; \pi)$	21. $f(x) = \operatorname{ch} x, x \in [-\pi; \pi)$
22. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \in [-\pi; 0] \\ 0, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	23. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in [-\pi; 0] \\ 0, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	24. $f(x) = \cos \frac{x}{2} + 1, x \in [-\pi; \pi)$
25. $f(x) = \operatorname{ch} x, x \in [-\pi; 0)$	26. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-\pi; 0] \\ -2, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	27. $f(x) =  x  + \pi, x \in [-\pi; \pi)$

**Задача 2** Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию  $f(x)$ , имеющую наименьший период  $T = 2l$ . Составить сумму ряда  $S(x)$ . Найти амплитудный спектр функции и построить его график..

*В а р и а н т ы*

1. $f(x) = 2 -  x ,$ $x \in [-2; 2), T = 4$	2. $f(x) = 1 -  x ,$ $x \in [-1; 1), T = 2$	3. $f(x) = x,$ $x \in [-1; 1), T = 2$
4. $f(x) = -\frac{x}{2},$ $x \in [-2; 2), T = 4$	5. $f(x) = e^{ x },$ $x \in [-2; 2), T = 4$	6. $f(x) = e^{- x },$ $x \in [-1; 1), T = 2$



7. $f(x) = 2x - 2,$ $x \in [-1; 1), T = 2$	8. $f(x) = 4 - x,$ $x \in [-4; 4), T = 8$	9. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2,$ $x \in [-2; 2), T = 4$
10. $f(x) = \operatorname{sh} x,$ $x \in [-2; 2), T = 4$	11. $f(x) = 4 - x^2,$ $x \in [-1; 1), T = 2$	12. $f(x) = x^2,$ $x \in [-2; 2), T = 4$
13. $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-2; 0) \\ -x, & x \in [0; 2) \end{cases},$ $T = 4$	14. $f(x) =  x ,$ $x \in [-2; 2), T = 4$	15. $f(x) = x - 1,$ $x \in [-1; 1), T = 2$
16. $f(x) = \begin{cases} -2, & x \in [-1; 0) \\ 3, & x \in [0; 1) \end{cases},$ $T = 2$	17. $f(x) = \frac{x}{2},$ $x \in [-1; 1), T = 2$	18. $f(x) =  x  - 1,$ $x \in [-1; 1), T = 2$
19. $f(x) = 3 -  x ,$ $x \in [-3; 3), T = 6$	20. $f(x) = 3x,$ $x \in [-1; 1), T = 2$	21. $f(x) = \begin{cases} -1.5, & x \in [-1; 0) \\ 1, & x \in [0; 1) \end{cases},$ $T = 2$
22. $f(x) = \frac{1}{4}x,$ $x \in [-2; 2), T = 4$	23. $f(x) =  x  - 2,$ $x \in [-1; 1), T = 2$	24. $f(x) =  x  + x,$ $x \in [-2; 2), T = 4$
25. $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-3; 0) \\ 3, & x \in [0; 3] \end{cases}$ $T = 6$	26. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0) \\ \sin \frac{\pi x}{2}, & x \in [0; 1) \end{cases}$ $T = 2$	27. $f(x) = \begin{cases} -2, & x \in [-2; 0) \\ 3, & x \in [0; 2) \end{cases}$ $T = 4$

### План решения задач 1 и 2

1. Постройте график функции  $f(x)$ ,  $x \in [-l; l)$  и ее периодического продолжения. Проанализируйте возможность разложения  $f(x)$  в тригонометрический ряд Фурье.
2. Запишите теоретический вид ряда Фурье для  $f(x)$  и формулы для коэффициентов ряда, учитывая величину периода и свойства четности функции  $f(x)$ , если оно есть.
3. Вычислите коэффициенты ряда  $a_0$ ,  $a_n$  и  $b_n$ , подставьте их в формально составленный ранее ряд Фурье.
4. Подтвердите достоверность разложения построением графиков частичных сумм  $S_k(x)$  составленного ряда Фурье, увеличивая  $k$  до визуального совпадения графиков функций  $S_k(x)$  и  $f(x)$ .
5. Запишите сумму ряда  $S(x)$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ , используя теорему Дирихле; постройте график функции  $S(x)$ .
6. Найдите амплитудный спектр  $A_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$  и постройте его график.
7. Составьте ответ по задаче.

**Задача 3** Составить тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме для периодической функции  $f(x), T = 2l$ . Определить дискретный амплитудный спектр функции.

*В а р и а н т ы*

1. $f(x) = e^{-x} + 1, T = 2\pi$	2. $f(x) = e^x - 1, T = 2\pi$	3. $f(x) = e^{-3x}, T = 2\pi$
4. $f(x) = e^{2x}, T = 2\pi$	5. $f(x) = e^{-2x} + 1, T = 2\pi$	6. $f(x) = e^{ x } + 1, T = 4$
7. $f(x) = e^{-x} + 2, T = 2\pi$	8. $f(x) = e^{- x }, T = 2\pi$	9. $f(x) = e^{-0.5x} + 2, T = 2\pi$
10. $f(x) = e^{ x }, T = 4$	11. $f(x) = e^{- x } + 1, T = 2$	12. $f(x) = e^{3x} - 1, T = 2\pi$
13. $f(x) = e^{-3x}, T = 2\pi$	14. $f(x) = e^{0.5x}, T = 2\pi$	15. $f(x) = e^{-0.5x}, T = 2\pi$
16. $f(x) = e^{ x }, T = 2$	17. $f(x) = e^x + 1, T = 2\pi$	18. $f(x) = e^{0.5x} - 2, T = 2\pi$
19. $f(x) = e^{2x} - 1, T = 2\pi$	20. $f(x) = e^{- x } + 2, T = 4$	21. $f(x) = e^{- x }, T = 2$
22. $f(x) = e^{3x} + 1, T = 2\pi$	23. $f(x) = e^{ x } - 2, T = 2$	24. $f(x) = e^{0.5x}, T = 2\pi$
25. $f(x) = e^{-0.5x} + 2, T = 2\pi$	26. $f(x) = x + \pi, T = 2\pi$	27. $f(x) = x - 1, T = 2$

*П л а н р е ш е н и я з а д а ч и 3*

1. Составьте ряд Фурье в комплексной форме для функции  $f(x), x \in (-l; l)$ , вычислите коэффициенты ряда. Запишите сумму ряда  $S(x), x \in (-\infty; +\infty)$ , используя теорему Дирихле.
2. Перейдите от комплексной формы ряда Фурье к его действительной форме и подтвердите достоверность разложения построением графиков нескольких частичных сумм составленного ряда Фурье в действительной форме.
3. Определите дискретный амплитудный спектр функции  $f(x)$ . Вычислите значения нескольких амплитуд  $A_n, n = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, \dots$ . Постройте график  $A_n = A(\omega_n)$ , где  $\omega_n$  – частота  $n$ -й гармоники.
4. Составьте ответ по задаче.

**Задача 4** Составить представления функции  $f(x)$  интегралом Фурье. Найти преобразования Фурье и определить непрерывный амплитудный спектр функции  $f(x)$ .

*В а р и а н т ы*

1. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi] \\ 0, & x \notin [0; \pi] \end{cases}$	2. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$	3. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$
--	---	--

4. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in [0; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases}$	5. $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$	6. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [0; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases}$	8. $f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$	9. $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in [0; \pi] \\ 0, & x \notin [0; \pi] \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & x \in [-\pi; \pi] \\ 0, & x \notin [-\pi; \pi] \end{cases}$	11. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{2}}, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$	12. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0; 3] \\ 0, & x \notin [0; 3] \end{cases}$
13. $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x \notin [0; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$	14. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [0; 4] \\ 0, & x \notin [0; 4] \end{cases}$	15. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$
16. $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & x \in [0; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases}$	17. $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases}$	18. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$
19. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-\pi; \pi] \\ 0, & x \notin [-\pi; \pi] \end{cases}$	20. $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & x \in [0; \pi] \\ 0, & x \notin [0; \pi] \end{cases}$	21. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0; 4] \\ 0, & x \notin [0; 4] \end{cases}$
22. $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x \notin [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$	23. $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & x \in [0; 4] \\ 0, & x \notin [0; 4] \end{cases}$	24. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$
25. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0; \pi] \\ 0, & x \notin [0; \pi] \end{cases}$	26. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$	27. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2}, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$

#### План решения задачи 4

1. Составьте представления функции  $f(x)$  интегралом Фурье в действительной форме и в комплексной форме. Запишите функцию  $S(x)$ , к которой сходится составленный интеграл Фурье.
2. Подтвердите достоверность представления построением графика интеграла Фурье на промежутке  $x \in (-l; l)$ , где число  $l$  нужно взять большим.
3. Запишите косинус-преобразование, синус-преобразование и комплексное преобразование Фурье функции  $f(x)$ .
4. Определите непрерывный амплитудный спектр  $A(\omega)$  функции  $f(x)$ , постройте его график.
5. Составьте ответ по задаче.